数　学

$\boxed{1}$　以下の設問 (1)〜(3) の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{オ}}$ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) $\dfrac{\sin 65^\circ + \sin 55^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 40^\circ}$ の値を求めると $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 直線 $x+y=a$ が楕円 $C\colon x^2+2y^2=20$ の接線となるのは $a=\pm\boxed{\text{イ}}$ のときである．これらの接線に垂直となる C の接線は 2 本ある．これら 4 本の接線で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) 正の整数 n に対して $\sqrt{n}$ の整数部分を a_n で表す．例えば $a_2=1$，$a_3=1$，$a_5=2$ である．正の整数 k に対して，$a_n=k$ となる n の個数を k を用いて表すと $\boxed{\text{エ}}$ となる．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{2023} a_n$ を求めると $\boxed{\text{オ}}$ となる．

◇M1(807—2)

$\boxed{2}$ $z \neq 1$ なる複素数 z に対して

$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

と定める．また，$z \neq -1$ なる複素数 z に対して

$$g(z) = \frac{-z}{z+1}$$

と定める．

(1) 複素数 z を $z = x + yi$ (x, y は実数，i は虚数単位）で表す．i), ii) の $\boxed{\text{カ}}$ 〜 $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまる適切な選択肢を (a)〜(h) より選び，その記号を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

i) $|f(z)| = |g(z)|$ が成り立つための z の必要十分条件は $\boxed{\text{カ}}$ である．

ii) $z \neq 0$ とする．$\arg \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つための z の必要十分条件は $\boxed{\text{キ}}$ かつ $\boxed{\text{ク}}$ である．

(a) $x = 0$　(b) $y = 0$　(c) $x > 0$　(d) $y > 0$
(e) $x < 0$　(f) $y < 0$　(g) $x^2 + y^2 = 1$　(h) $x^2 + y^2 = 2$

(2) $z \neq -1$ かつ $g(z) \neq 1$ である z に対して，

$$h(z) = f(g(z)) = \frac{g(z)}{g(z) - 1}$$

と定める．i)〜iii) の $\boxed{\text{ケ}}$ 〜 $\boxed{\text{セ}}$ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

i) $z = h(z)$ を満たす複素数は $z = \boxed{\text{ケ}}$ である．

ii) $z_1 = 2$ として，

$$z_{n+1} = h(z_n) \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と定める．数列 $\{z_n\}$ の一般項を n を用いて表すと $z_n = \dfrac{2}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

iii) 複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円 C_1 の周上を点 z が動くとき，$w = h(z)$ で定まる点 w のえがく図形 C_2 は点 $\boxed{\text{サ}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{シ}}$ の円となる．

同様に $n = 2, 3, 4, \cdots\cdots$ に対して，図形 C_{n+1} を「点 z が C_n の周上を動くとき，$w = h(z)$ で定まる点 w のえがく図形」と定義する．図形 C_n は点 $\boxed{\text{ス}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{セ}}$ の円となる．

$\boxed{3}$ n を正の定数とし，$n > a > 0$ とする．関数 $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ に対して，関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x)^a(1 - f(x))^{n-a}$$

とおく．以下の設問 (1)〜(3) の $\boxed{\text{ソ}}$ 〜 $\boxed{\text{ト}}$ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) x が実数全体を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ソ}} < f(x) < \boxed{\text{タ}}$$

である．また，$f(x) = \dfrac{1}{2}$ となる x の値は $\boxed{\text{チ}}$ である．

(2) $g(x)$ が最大となる x の値は $\boxed{\text{ツ}}$ であり，その最大値 L を n と a を用いて表すと $\boxed{\text{テ}}$ である．

(3) (2) で求めた L を a の関数と考える．a が $n > a > 0$ の範囲を動くとき，L の最小値は $\boxed{\text{ト}}$ である．

◇M1(807—6)

$\boxed{4}$ 以下の設問 (1) の $\boxed{\text{ナ}}$, $\boxed{\text{ニ}}$ にあてはまる適切な数と (2) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記載せよ.

(1) 赤玉 6 個, 白玉 5 個を入れてよくかき混ぜた箱がある. この箱から 4 個の玉を同時にとり出す.

i) とり出した 4 個の玉のうち赤玉がちょうど 2 個となる確率は $\boxed{\text{ナ}}$ である.

ii) とり出した 4 個の玉に赤玉が 1 個以上含まれる確率は $\boxed{\text{ニ}}$ である.

(2) n は 40 以上の整数とする. 白玉だけが n 個入った箱があり, この箱から 40 個の玉をとり出し, しるしをつけてから箱に戻してよくかき混ぜる.
この箱から 20 個の玉を同時にとり出すとき, とり出した 20 個の玉のうち 3 個にしるしがついている確率を $L(n)$ で表す. $L(n)$ を最大にする n を求めよ. なお求める過程も記載すること.

以 上