数　学

$\boxed{1}$ 以下の設問 (1), (2) の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) 関数 $f(x)=3^{2x+1}+3^{-2x+1}-20(3^x+3^{-x})+10$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ で，このときの x の値は $x=\boxed{\text{イ}}$ または $x=\boxed{\text{ウ}}$ となる．

(2) 座標平面上を運動する点 P の座標 $(x,\ y)$ が時刻 t の関数として，

$$\begin{cases} x=e^{-t}\cos\dfrac{\pi t}{2}, \\ y=e^{-t}\sin\dfrac{\pi t}{2} \end{cases}$$

で表されるとき，点 P の速さは $\dfrac{e^{-t}}{2}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，点 P が時刻 $t=0$ から $t=\boxed{\text{オ}}$ までの間に動く道のりは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{4}$ である．

2　聖さん，マリさんが常用対数表を見て話し合っている．次の会話文の $\boxed{カ}$ ～ $\boxed{メ}$ にあてはまる適切な数を 0 ～ 9 から選択し解答用紙の所定の欄に記入せよ．

$\log_{10}1.2$	$\log_{10}1.3$	$\log_{10}1.4$	$\log_{10}1.5$	$\log_{10}1.6$	$\log_{10}1.7$
0.0792	0.1139	0.1461	0.1761	0.2041	0.2304
$\log_{10}1.8$	$\log_{10}1.9$	$\log_{10}2.0$	$\log_{10}5.2$	$\log_{10}7.0$	
0.2553	0.2788	0.3010	0.7160	0.8451	

※ $\log_{10}x$ の値を小数第 5 位で四捨五入した値

聖　「$\log_{10}2.6$ は，

$$\log_{10}2.6 = \log_{10}(1.3\times 2) = \log_{10}1.3 + \log_{10}2.0 \qquad (1)$$

と考えると 0.4149 になるね」

マリ「ちょっと待って．

$$\log_{10}2.6 = \log_{10}(5.2\div 2) = \log_{10}5.2 - \log_{10}2.0 \qquad (2)$$

と考えると 0.4150 だよ．結果が一致しないのはなぜだろう？」

聖　「何でだろうね？…表の右下に『$\log_{10}x$ の値を小数第 5 位で四捨五入した値』と書いてある．じゃあ，$\log_{10}1.3$ と $\log_{10}2.0$ の正確な値は

$$0.11385 \leqq \log_{10}1.3 < 0.11395$$
$$0.30\boxed{カ}\boxed{キ}\boxed{ク} \leqq \log_{10}2.0 < 0.30\boxed{ケ}\boxed{コ}\boxed{サ}$$

の範囲にあるということかな．これらを利用すると (1) から $\log_{10}2.6$ の正確な値は

$$0.41\boxed{シ}\boxed{ス} \leqq \log_{10}2.6 < 0.41\boxed{セ}\boxed{ソ}$$

の範囲にあると言えるね」

マリ「(2) からは

$$0.41\boxed{タ}\boxed{チ} < \log_{10}2.6 < 0.41\boxed{ツ}\boxed{テ}$$

だね．$\log_{10}2.6$ の正確な値は聖さんの結果との共通部分にあるので

$$0.41\boxed{ト}\boxed{ナ} < \log_{10}2.6 < 0.41\boxed{ニ}\boxed{ヌ}$$

の範囲だね」

聖　「次は $2023 = 7\times 17^2$ にちなんで何か調べてみようよ」

マリ「$7^{17^2} = 7^{289}$ とか，やたらと大きい数を調べてみるのはどうかな？」

聖　「よし，7^{17^2} を調べよう．この巨大な数の下 2 桁は $\boxed{ネ}\boxed{ノ}$ だ．下 3 桁は難しいな．対数を利用すれば上 2 桁（最高位の数とその隣の数）は求められるよね」

マリ「対数表の $\log_{10} 7.0$ の値を用いて $\log_{10} 7^{17^2} = 289 \log_{10} 7.0$ を計算すると

$$289 \times 0.8451 = 244.2339$$

だね．この値を用いると 7^{17^2} は $\boxed{\text{ハ}}\boxed{\text{ヒ}}\boxed{\text{フ}}$ 桁の整数で，上 2 桁は $\boxed{\text{ヘ}}\boxed{\text{ホ}}$ だ」

聖　「でも $\log_{10} 7.0$ の正確な値の範囲を考えると，$289 \log_{10} 7.0$ の正確な値は

$$244.21945 \leqq 289 \log_{10} 7.0 < 244.24835$$

の範囲にあるから，7^{17^2} の上 2 桁は $\boxed{\text{ヘ}}\boxed{\text{ホ}}$ または $\boxed{\text{マ}}\boxed{\text{ミ}}$ となるね．どっちが正解かな？」

マリ「えーっと．ここにある情報だけでは結論は出なさそうだよ」

聖　「そう？電卓で答え合わせしてみようか」

マリ「7^{289} を電卓で計算すると…エラーだね．でも $\log_{10} 7.0$ なら $0.845098\cdots$ と出るよ」

聖　「それなら 7^{17^2} の上 2 桁は $\boxed{\text{ム}}\boxed{\text{メ}}$ だね」

$\boxed{3}$ 放物線 $y^2 = 2x$ を C とする. 以下の 設問 (1), (2) の $\boxed{\text{モ}}$ ～ $\boxed{\text{ロ}}$ に当てはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ.

(1) C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{9}{2}, 3\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{2}\right)$ での接線の交点を P とする. このとき, P の座標は $\left(\boxed{\text{モ}}, \boxed{\text{ヤ}}\right)$ である. また, $\angle\mathrm{APB}$ の大きさを弧度法で表すと $\boxed{\text{ユ}}$ である.

(2) C 上の 2 点を $\mathrm{A}\left(\dfrac{a^2}{2}, a\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{b^2}{2}, b\right)$ とおく. ただし $a > b$ である. A, B での接線の交点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とするとき, X と Y を a, b で表すと $X = \dfrac{\boxed{\text{ヨ}}}{2}$, $Y = \dfrac{\boxed{\text{ラ}}}{2}$ である.

(3) (2) において $\angle\mathrm{APB}$ を (1) の $\boxed{\text{ユ}}$ に保ったまま A, B を動かすとき, X の最小値は $\boxed{\text{リ}}$ となる. また, 点 P の軌跡は双曲線 $\dfrac{x^2}{\boxed{\text{ル}}} - \dfrac{y^2}{\boxed{\text{レ}}} = 1$ を x 軸方向に $\boxed{\text{ロ}}$ だけ平行移動した曲線の一部である.

◇M1(331—6)

4　座標平面上の点 $(x,\ y)$ のうち $x,\ y$ がともに整数であるものを格子点と呼ぶ．(1) の $\boxed{\text{ワ}}$ にあてはまる適切な数と (1) の (ii) および (2) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記載せよ．

(1) 原点 O および格子点 A, B を頂点とする △OAB のうち面積が最小となるものを考える．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (b_1,\ b_2)$ とするとき $|a_1b_2 - a_2b_1| = \boxed{\text{ワ}}$ となる．

(ii) 平面上の点 P の位置ベクトルを，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表す．とくに P が格子点のとき，$m,\ n$ は整数となることを示せ．

(2) 原点 O および格子点 A, B, C を頂点とする四角形のうち面積が最小となるものを考える．ただし各頂点における内角は 180° 未満とする．

(i) この四角形の周および内部に含まれる格子点は頂点のみであることを示せ．

(ii) この四角形は平行四辺形であることを示せ．